Fourier-Reihe eines Sägezahn

Emil Obermayr, DD3AH

29. April 2018

Zusammenfassung

Der Sägezahn wird als Funktion z.B. in Wobbel-Generatoren zur Prüfung von Geräten in einem Frequenzspektrum benutzt. Hier wird betrachtet, welche Frequenz-Komponenten der Sägezahn selber enthält.

1 Einleitung

Es wird ein Sägezahn der Amplitude π betrachtet, der von $x = 0$ bis 2π ansteigt.

2 Kosinus-Reihe

Die Kosinus-Reihe fällt weg, weil der Sägezahn keine spiegelsymmetrischen Anteile enthält.

$$a_k = 1/\pi \int_0^{2\pi} x \cos(kx) dx \tag{1}$$

$$= 1/\pi \left[\frac{kx \sin(kx) + \cos(kx)}{k^2} \right]_0^{2\pi} \tag{2}$$

$$= 0 \tag{3}$$

Der Sinus-Term ist Null für beide Grenzen und der Kosinus-Term identisch an den Grenzen. Also fällt der gesamte Ausdruck zu Null zusammen. Das gilt generell für Funktionen für die gilt $-f(-x) = f(x)$, die also punktsymmetrisch sind.

3 Sinus-Reihe

$$b_k = 1/\pi \int_0^{2\pi} x \sin(kx) dx \tag{4}$$

$$= 1/\pi \left[\frac{\sin(kx) - kx \cos(kx)}{k^2} \right]_0^{2\pi} \tag{5}$$

$$= -2/k \tag{6}$$

In diesem Ausdruck fällt in der Stammfunktion der Sinus-Term weg, weil beide Grenzen 0 sind. Der Kosinus ist bei beiden Grenzen 1. Die obere Grenze trägt $2\pi k$ bei, die untere ist 0. Das Minuszeichen beschreibt dann im Endergebnis den in der Praxis häufiger gebrauchten steigenden Sägezahn.

4 Ergebnis

Der Sägezahn enthält also alle Oberwellen mit fallender Amplitude. Das unterscheidet ihn z.B. vom Rechteck, welcher nur jede zweite Oberwelle enthält.